

POINTS FIXES DANS $\mathbb{R}$

Dominique Hoareau, domeh@wanadoo.fr

Si f est une fonction définie sur un intervalle J à valeurs dans J , on définit correctement une suite $u = (u_n)$ par le choix de son premier terme a dans J et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite u sera aussi notée (u_n^a) ou (f, a) . On pose $f^0 = id_J$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$ la n ème itérée de f . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire $u_n^a = f^n(a)$. Si f est supposée de plus continue sur J , la convergence éventuelle de (u_n^a) ne peut se faire que vers un point fixe de f , ie une solution de l'équation $f(x) = x$. Ceci justifie l'enthousiasme avec lequel on se lance à la conquête de théorèmes de points fixes.

Première partie

Avec l'ordre dans $\mathbb{R}$.

1- Théorème de Knaster

Toute fonction $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ croissante admet un point fixe.

(Conclusion encore valable si on remplace I par un segment quelconque)

Preuve : On pose : $\Omega = \{x \in I / x \leq f(x)\}$. Ω est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in \Omega$), et majorée (par 1), donc Ω admet une borne supérieure a . Avec f croissante sur I , $\forall x \in I$ $x \leq f(x) \leq f(a)$ donc $f(a)$ est un majorant de Ω d'où $a \leq f(a)$ et $a \in \Omega$. Toujours avec f croissante sur I , $f(a) \leq f(f(a))$ donc $f(a) \in \Omega$ et par statut de a , $f(a) \leq a$. Ce qui donne par doubles inégalités : $a = f(a)$.

Remarques :

- Peut on remplacer " f croissante" par " f décroissante" ? Non, penser à la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$, $f(1) = 0$, décroissante sur I et sans point fixe.
- Peut-on remplacer $I = [0, 1]$ par $]0, 1]$? Penser à $x \mapsto \sin x$ croissante sur $]0, 1]$ et à valeurs dans $]0, 1]$, clairement sans point fixe.

Exercice : Soient $f, g : I \rightarrow I$ croissantes et commutant.

Alors f et g ont un point fixe commun.

On considère $\Theta = \{x \in I / x \leq f(x) ; x \leq g(x)\}$ et sa borne supérieure α . Avec f et g croissantes sur I , on montre que $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont des majorants de Θ et sont donc supérieurs à α . On écrit ensuite à bon droit : $g(\alpha) \leq g(g(\alpha))$ et : $g(\alpha) \leq g(f(\alpha)) = f(g(\alpha))$, ce qui donne $g(\alpha) \in \Theta$, $g(\alpha) \leq \alpha$, d'où $g(\alpha) = \alpha$. De même on vérifie que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice (cf RMS-10-1996 et RMS-6-1998)

On considère l'équation différentielle $(E) : x' = \cos t + \cos x$.

On peut montrer que

1. Toute solution maximale de (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Si une solution x prend en un point t_0 une valeur dans $[0, \pi]$, alors pour tout $t \geq t_0$, on a $x(t) \in [0, \pi]$.

Montrer que (E) possède une solution périodique.

Si x est une solution maximale de (E) , $\tilde{x} : t \mapsto x(t + 2\pi)$ est aussi solution. Il suffit donc de trouver une solution x telle que $x(0) = x(2\pi)$. En effet, x et $\tilde{x}$ toutes les deux solutions maximales de (E) vérifieront alors la même condition initiale en 0 et donc coïncideront.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note x_a l'unique solution maximale de l'équation (E) telle que $x_a(0) = a$. Soit P l'application qui à $a \in \mathbb{R}$ associe $x_a(2\pi)$. Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $x_a(0) < x_b(0)$ et puisque deux solutions maximales de (E) ne peuvent se croiser, $x_a < x_b$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier $x_a(2\pi) < x_b(2\pi)$, ce qui assure la croissance de P sur $\mathbb{R}$. P envoie par ailleurs $[0, \pi]$ sur lui-même, donc P admet un point fixe a dans $[0, \pi]$. Il vient $x_a(2\pi) = a = x_a(0)$. cqfd

Une digression

(Même schéma de point fixe en algèbre et théorème de Cantor-Bernstein)

Données : Soit E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications injectives.

On pose : $h = g \circ f$. On définit l'application H de l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans lui-même, par $H(X) = (E \setminus g(F)) \cup h(X)$. On vérifie :

1. H est croissante (ie conserve l'ordre).
2. $\Omega = \{X \in \mathcal{P}(E) ; X \subset H(X)\}$ est non vide ($\emptyset \in \Omega$) et possède une borne supérieure $A = \bigcup_{X \in \Omega} X$.
3. $H(A)$ est un majorant de Ω .
4. $A \in \Omega$.
5. $H(A) = A$. (A est un point fixe de H)
6. Pour tout $x \notin A$ ($x \in g(F)$), il existe un unique $y \in F$ tel que $x = g(y)$.

On pose alors $\tilde{f}(x) = y$. On prolonge $\tilde{f}$ à E tout entier, en posant pour $x \in A$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. L'application $\tilde{f}$ est surjective (pour $y \in F$, on détermine un antécédent de y en envisageant les cas $g(y) \in A$, $g(y) \notin A$), et $\tilde{f}$ est injective (pour $x_1 \neq x_2$ dans E , comparer $\tilde{f}(x_1)$ et $\tilde{f}(x_2)$ selon les cas $x_1, x_2 \in A$, $x_1, x_2 \notin A$, et $x_1 \in A, x_2 \notin A$).

Conclusion : E et F sont équipotents.

2 Monotonie de f et suites récurrentes associées à f

Lorsque l'application $f : J \rightarrow J$ est croissante sur J , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n = f(u_{n-1})$ sont rangés dans le même ordre que u_n et u_{n-1} , ce qui assure la monotonie de (u_n) . Son sens de variation est alors donné par la position relative des deux premiers termes u_0 et u_1 . Par le théorème de la limite monotone, la convergence de (u_n) équivaut alors à son caractère majoré ou minoré. Si f est décroissante sur J , $f \circ f$ est croissante sur J , donc les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) (de même fonction génératrice f^2) sont monotones, de monotonie opposée.

a) Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron

On étudie la suite (u_n) définie par son premier terme $a \in]0, +\infty[$ et la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. Pour $x \in]0, +\infty[$, $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ donc le seul candidat pour être limite de (u_n) est $\sqrt{2}$. On a

- $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0 \quad (n \geq 0).$
- $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0 \quad (n \geq 1).$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) converge et sa limite est nécessairement $\sqrt{2}$.

Remarques :

- On part d'un rectangle de dimensions a et $\frac{2}{a}$ et on construit une suite de rectangles d'aire 2, qui se rapproche d'un carré d'aire 2 : à l'étape $n+1$, on remplace les dimensions u_n et $\frac{2}{u_n}$ par leur moyenne u_{n+1} et $\frac{2}{u_{n+1}}$; Les rectangles obtenus ont ainsi des longueurs de plus en plus proches des largeurs.
- Voici l'exemple d'une suite de nombres rationnels décroissante et minorée qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Ceci traduit une lacune de $\mathbb{Q}$, qui n'est pas complet au sens de l'ordre.
- On peut vérifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} \right)^2$ et comme (u_n) converge vers $\sqrt{2}$, on peut écrire

$$u_n - \sqrt{2} \sim 2\sqrt{2} \left(\frac{u_1 - \sqrt{2}}{u_1 + \sqrt{2}} \right)^{2^{n-1}}.$$

Plus u_1 est proche de $\sqrt{2}$, ie plus l'approximation de départ est fine, plus la convergence de (u_n) vers $\sqrt{2}$ est rapide.

- A chaque itération, on prend pour valeur approchée de $\sqrt{2}$, l'abscisse de l'intersection de la tangente au point $(x_n, x_n^2 - 2)$ du graphe $y = x^2 - 2$ avec l'axe des abscisses.

b) Un exemple classique de "point fixe neutre" avec obtention d'un équivalent

Soit (u_n) la suite de germe $a \in \mathbb{R}$ et de fonction génératrice $f : x \mapsto x - x^2$. Pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$ donc (u_n) est décroissante.

1. $a \in [0, 1]$. L'application f applique $[0, 1]$ dans $[0, \frac{1}{4}]$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, \frac{1}{4}]$. La suite (u_n) décroissante et minorée converge donc. Sa limite est le seul point fixe de l'application continue f , à savoir 0.

2. $a \notin [0, 1]$. L'image par f de $] - \infty, 0[\cup]1, +\infty[$ est $] - \infty, 0[$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs dans $] - \infty, 0[$. Si (u_n) converge dans $\mathbb{R}$, elle ne peut converger que vers 0 et l'inégalité $u_n \leq u_1 < 0$ valable pour $n \geq 1$ donne alors $0 \leq u_1 < 0$, ce qui est absurde. Dans le cas $a \notin [0, 1]$, (u_n) diverge vers $-\infty$.

Soit $a \in [0, 1]$. Pour déterminer un équivalent de (u_n) , on a besoin d'un lemme dit "de l'escalier" qui est une conséquence du lemme de Césaro.

Lemme de Césaro : Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle qui converge vers l . Alors la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}(u_0 + \dots + u_{n-1})$ converge aussi vers l . On dit que (u_n) converge en moyenne vers l .

Lemme de l'escalier : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tout $n \geq 1$ on a $u_n = u_0 + nr$, ce qui assure la convergence de $(\frac{u_n}{n})$ vers r .

Soit à présent (u_n) une suite réelle asymptotiquement arithmétique, ie telle que "la suite des marches" $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge vers l .

Les preuves des lemmes sont classiques et laissées au lecteur.

Obtention de l'équivalent : On détermine $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle et on conclut avec le lemme de l'escalier. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha((1 + \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n})^\alpha - 1) \sim -\alpha u_n^{\alpha+1}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On choisit $\alpha = -1$, de sorte que $(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n})$ converge vers 1. Par le lemme de l'escalier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$, ce qui donne $u_n \sim \frac{1}{n}$.

On pourra mettre en oeuvre ces techniques en étudiant les suites :

- $u_0 = a > 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$
- $u_0 = a \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$
- $u_0 = a \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
- $u_0 = a > 0$, $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

On pourra aussi établir le résultat général suivant :

Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^+$, a un développement limité en 0 de la forme :

$$f(x) = x - kx^{p+1} + o(x^{p+1}) \quad k, p > 0,$$

alors il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < f(x) < x$ sur $]0, \alpha]$. La suite récurrente (u_n) liée à f et initialisée en $u_0 \in]0, \alpha]$ est alors bien définie, décroît et converge par limite monotone. Sa limite qui est un point fixe de f est nécessairement 0. Enfin :

$$u_n \sim \left(\frac{1}{pkn} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

c) Un exemple de divergence "grossière"

On étudie la suite (u_n) de premier terme $a > 0$ vérifiant $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On vérifie par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs. Ainsi l'égalité $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$ assure que (u_n) est croissante. La fonction continue $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}, x > 0$ est sans point fixe donc (u_n) ne peut converger dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de la limite monotone, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La relation $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ peut encore s'écrire : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$, version discrète de l'équation différentielle (ED) $y' = \frac{1}{y}$. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{2x+c}, c > 0$ sont des solutions positives définies sur $\mathbb{R}^+$ de la dite ED et se comportent en $+\infty$ comme $\sqrt{2x}$. On peut conjecturer que $u_n \sim \sqrt{2n}$.

On vérifie que $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2$. Par le lemme de l'escalier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{n} = 2$, ce qui donne bien $u_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice : Donner un équivalent en $+\infty$ de la suite (u_n) de premier terme $a > 0$ vérifiant $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$ ($\alpha > 0$).

on pourra considérer (correctement) la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_n}$, montrer que (v_n) converge vers 0, et procéder comme au paragraphe b) pour obtenir un équivalent (v_n) .

d) Un exemple de convergence en spirale

On étudie la suite (u_n) définie par son premier terme $a \in [0, 2\pi]$ et la relation $u_{n+1} = u_n + 2 \sin u_n$.

- On étudie les variations de $f : x \mapsto x + 2 \sin x$ sur $[0, 2\pi]$ et le signe de $f(x) - x$, résultats qu'on utilise librement dans la suite.
- Les points fixes de f sont 0, π et 2π .
- On prend $a \in]0, 2\pi[$ et on vérifie en deux temps qu'à partir d'un certain rang, $u_n \in]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$. On commence par supposer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \notin]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[\quad (\star),$$

jusqu'à aboutir à une contradiction.

Premier cas : $u_0 \in]0, \frac{2\pi}{3}]$. Par récurrence, $u_n \in]0, \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}]$ et avec $\star$, on a $u_n \in]0, \frac{2\pi}{3}]$. (u_n) croissante et majorée par $\frac{2\pi}{3}$ converge alors vers un point fixe de f . Impossible.

Deuxième cas : $u_0 \in [\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$. Par récurrence, $u_n \in [\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, 2\pi[$ et avec $\star$, $u_n \in [\frac{4\pi}{3}, 2\pi[$. (u_n) décroissante et minorée par $\frac{4\pi}{3}$ converge vers un point fixe de f . Impossible.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$.

Puisque $f([\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]) = [\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}]$, on a $\forall n \geq N \quad u_n \in]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$.

- f décroît sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, donc les suites bornées (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent (respectivement vers λ et μ). λ et μ sont échangés par f , d'où l'égalité : $\mu + \sin \mu = \lambda + \sin \lambda$. Une étude rapide de $h : x \mapsto x + \sin x$ donne h strictement croissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, donc h est injective et $\lambda = \mu$.
- En définitive, (u_n) converge vers un point fixe de f sur $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, donc converge vers π .

e) Autre exemple de convergence en spirale

On étudie la suite (u_n) définie par son premier terme $a \in \mathbb{R}$ et la relation $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$. L'application $f : x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ est à valeurs dans $[0, 2]$, décroît sur $[0, 2]$ donc les suites bornées (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (de monotonie opposée) et donc convergent. On vérifie que pour $x \in [0, 2]$,

$$f^2(x) - x = -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4},$$

ce qui assure que l'ensemble des points fixes de f^2 est $\text{Fix}(f^2) = \{1\}$. D'où la convergence de (u_n) vers 1.

f) Exercice

Soit $g : I = [0, 1] \rightarrow I$ une application 1-lipschitzienne (ou contraction large). Soit $a \in I$ et $u = (u_n)$ la suite de germe a de fonction génératrice $f : x \in I \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}g(x) \in I$. Alors u converge vers un point fixe de g .

Preuve : Pour $x < y$ dans I , $f(y) - f(x) = \frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(g(y) - g(x))$.

Or $g(y) - g(x) \geq -|g(y) - g(x)| \geq -|y - x| = x - y$ donc $f(y) - f(x) \geq 0$. L'application f est donc croissante sur I , et u monotone et bornée converge. Soit l sa limite. On a $l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}g(l)$ par continuité de g , d'où le résultat.

g) Exercice

Si $f : I \rightarrow I$ est continue et croissante sur I et si $l < m$ sont deux points fixes consécutifs de f , alors pour tout $a \in [l, m]$, la suite (u_n^a) converge.

Preuve : Par croissance de f , $[l, m]$ est stable par f et (u_n^a) (qui est à valeurs dans $[l, m]$) est monotone. Si $a < f(a)$ (graphe de f au dessus de la diagonale), (u_n^a) est croissante et, majorée par m , elle converge. Sa limite, nécessairement point fixe de la fonction continue f , est m . Si $a > f(a)$, (u_n^a) converge vers l .

Exemples : Considérer $f : x \mapsto x^2$ ou $f : x \mapsto \sin \frac{\pi}{2}x$. La suite de fonctions (f^n) converge simplement sur I vers $x \mapsto 1_{\{1\}}$, respectivement $1_{[0,1]}$. La convergence de (f^n) n'est pas uniforme puisque la fonction limite simple n'est pas continue.

Deuxième partie

Utilisation de la connexité et de la compacité dans $\mathbb{R}$

0- Quelques outils fondamentaux

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : Une fonction réelle définie et continue sur un intervalle prend toute valeur comprise entre deux de ses valeurs.

Valeurs d'adhérence d'une suite réelle

- Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

(Théorème de Bolzano-Weierstrass)

- Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est dit compact si toute suite de points de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K . K est compact si et seulement si il est fermé et borné. (Théorème de Heine-Borel)

Exemple : L'ensemble ω des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée (u_n) est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \{u_p ; p \geq n\}$.

$$l \in \omega \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \varepsilon > 0)]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\cap U_n \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) l \in \overline{U_n},$$

donc $\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, ω contenu dans $\overline{U_0}$ est clairement borné, et non vide selon le théorème de Bolzano-Weierstrass. cqfd

- Une suite bornée de $\mathbb{R}$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

1- Le "petit" théorème de Brouwer

Toute fonction continue f de $I = [0, 1]$ dans I admet un point fixe. On dit que le segment I a la propriété du point fixe.

Preuve : L'application $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur I et vérifie $g(0) \geq 0$, $g(1) \leq 0$, donc g s'annule sur I par valeurs intermédiaires. cqfd

Remarque 1 :

- Le résultat reste-t-il valable si on remplace l'intervalle réel I par une partie connexe de $\mathbb{C}$? Non! Penser à la translation $z \mapsto z + i$ de $i\mathbb{R}$ sur $i\mathbb{R}$ (où $i\mathbb{R}$ désigne la droite des imaginaires purs dans le plan complexe).
- On ne peut même pas affaiblir l'hypothèse "segment" en "intervalle de $\mathbb{R}$ ". Considérer l'application continue $x \mapsto \sin x$ de $J =]0, 1]$ dans J , clairement sans point fixe.
- Peut-on remplacer I par une partie connexe et compact de $\mathbb{C}$? Penser à l'isométrie $z \mapsto -z$ de $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ sur S^1 .

Remarque 2 :

Toute partie J de $\mathbb{R}$ qui a la propriété du point fixe est un intervalle réel.

Sinon, on choisit $a < c < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $a \in J$, $b \in J$ et $c \notin J$. On pose :

$$A = J \cap]-\infty, c[, \quad B = J \cap]c, +\infty[.$$

$A \cup B$ est une partition de J en ouverts de J . On envisage l'application f de J dans $\{a, b\}$ définie par $f(x) = b$ si $x \in A$, $f(x) = a$ si $x \in B$. f est clairement sans point fixe. Pourtant, en tout x de J (par exemple $x \in A$, analogue si $x \in B$), quel que soit le voisinage W de $f(x) = b$, A est un voisinage de x qui vérifie $f(A) = \{b\} \subset W$, ce qui assure la continuité de f . Contradiction.

Exercice 1 : Existe-t-il une fonction réelle définie et continue sur I envoyant tout rationnel de I sur un irrationnel de I et tout irrationnel de I sur un rationnel de I ?

Une telle fonction f est continue de I dans I et clairement sans point fixe. Impossible d'après le "petit" théorème de Brouwer.

Exercice 2 Soit f un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $f + g$ est surjective.

Preuve : Pour $y \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = y$ équivaut à $x = f^{-1}(y - g(x))$. L'application f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ donc reste bornée sur la partie bornée $y - g(\mathbb{R})$. On choisit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\varphi : x \mapsto f^{-1}(y - g(x))$ prenne ses valeurs dans $[a, b]$, et on envisage la restriction de φ à $[a, b]$, qui admet selon le "petit" théorème de Brouwer un point fixe dans $[a, b]$.

Remarque : Lorsqu'on perturbe un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ par une application continue et bornée, on perd en général l'injectivité (ex : $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$), mais on conserve la surjectivité.

2- Un résultat qui contient le "petit" théorème de Brouwer

Soit G un fermé de I^2 . On suppose que chaque "coupe"

$$G_x = \{y \in I / (x, y) \in G\}$$

est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Alors G rencontre "la diagonale" de I^2 .

Remarque 1 : L'hypothèse " G fermé" est essentielle ; considérer $\left(\bigcup_{x \in [0,1[} \{x\} \times]x, 1]\right) \cup (\{1\} \times [0, 1[)$.

Remarque 2 : Si chaque G_x est un singleton $\{y_x\}$, on définit une application f de I dans I en posant $f(x) = y_x$, et G est exactement le graphe de f . On vérifie séquentiellement que le caractère fermé du graphe G implique la continuité de f sur I et on est ramené au paragraphe 1. Soit (x_n) une suite de points de I qui converge dans I vers l . On veut montrer que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(l)$ dans le compact I . Il suffit de vérifier que $f(l)$ est sa seule valeur d'adhérence. Soit m une valeur d'adhérence de $(f(x_n))$ (il en existe d'après Bolzano-Weierstrass) et ϕ une extraction telle que la sous-suite $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers m . Comme $(x_{\phi(n)})$ converge vers l , $(x_{\phi(n)}, f(x_{\phi(n)}))$ converge dans le fermé G vers (l, m) , ce qui donne $m = f(l)$. D'où le résultat.

Preuve :

- G est connexe.

On envisage une partition stricte $G = F_1 \cup F_2$ de G en fermés non vide de G . Fermé dans le compact I^2 , G est lui-même compact et les fermés F_1 et F_2 de G sont à leur tour compacts. On note p la projection $(x, y) \in I^2 \mapsto x$. Par hypothèse, $p(G) = I$ et clairement $p(G) = p(F_1) \cup p(F_2)$ où, par

continuité de p , $p(F_1)$ et $p(F_2)$ sont des compacts non vides, donc des fermés non vides de I . Puisque I est connexe, $p(F_1) \cap p(F_2) \neq \emptyset$. Soit u dans cette intersection. On peut écrire :

$$G_u = \underbrace{\{v \in I \mid (u, v) \in F_1\}}_{G_u^1} \cup \underbrace{\{v \in I \mid (u, v) \in F_2\}}_{G_u^2},$$

où G_u^1 et G_u^2 sont deux fermés non vides disjoints. Contradiction puisque G_u est connexe.

• Conclusion

Soit $\varphi : (x, y) \in G \mapsto x - y$. Avec la continuité de φ sur le connexe G , $\varphi(G)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. G_0 est non vide donc on choisit y_0 dans I tel que $(0, y_0) \in G$ et $\varphi(0, y_0) \leq 0$. De même avec G_1 non vide, il existe $y_1 \in I$ tel que $(1, y_1) \in G$ et $\varphi(1, y_1) \geq 0$. Par valeurs intermédiaires, il existe (x, y) dans G tel que $\varphi(x, y) = 0$, d'où $x = y$. cqfd

3- Points périodiques, orbites cycliques

A] Définitions : Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour f de J dans J et $a \in J$, on appelle *orbite de a* par f et on note $\mathcal{O}(f, a)$ ou $\mathcal{O}_a$, l'ensemble des images de a par les itérés de f . Si pour $p \in \mathbb{N}^*$ $f^p(a) = a$, on dit que a est *périodique* pour f (de période p) et que son orbite est *cyclique*. La plus petite période de a qui divise toute autre période, est alors appelée *ordre de a* .

B] Propriété : Soit $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ continue sur I . On suppose que l'itération par f ne conserve pas la proximité et explose tout intervalle ouvert non vide (arbitrairement petit) jusqu'à remplir I , précisément (C_0) : pour tout intervalle $]r, s[$ de I , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(]r, s[) = I$. Alors

1. $\forall 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \forall 0 \leq \mu < \nu \leq 1 \exists t \in]\alpha, \beta[\exists n \in \mathbb{N}^* f^n(t) \in]\mu, \nu[$, autrement dit pour $\alpha < \beta$ et $\mu < \nu$ dans I , il existe un tireur t dans $] \alpha, \beta [$ dont l'orbite visite la cible $] \mu, \nu [$ (facile avec (C_0)).
2. L'ensemble des points périodiques de f est dense dans I .

Soit $r < s$ dans I et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n(]r, s[) = I$. On choisit ρ et σ dans $]r, s[$ tels que $f^n(\rho) = 0$ et $f^n(\sigma) = 1$. La fonction $x \mapsto f^n(x) - x$ continue sur le segment d'extrémités ρ et σ , a des signes opposés en ρ et en σ donc s'annule sur le dit intervalle par valeurs intermédiaires. Ainsi, $]r, s[$ contient un élément à orbite cyclique. Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert non vide $]r, s[$, la densité des points périodiques dans I est acquise.

Exemple de la fonction tente : Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. De façon imagée, f agit sur le segment I de la façon suivante : on étire le segment I jusqu'à doubler sa longueur, puis on replie le segment étiré $[0, 2]$ sur lui-même autour de son milieu 1.

• Le graphe de f^n est la ligne brisée $A_0^n A_1^n \dots A_{2^n}^n$ où A_p^n est le point d'abscisse $\frac{p}{2^n}$ et d'ordonnée 0 si p est pair, 1 sinon.

Par recurrence sur n , on établit que sur $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]$ ($0 \leq p \leq \frac{2^n-1}{2}$) :

$$f^n(x) = (-1)^p 2^n x - (-1)^p 2E(\frac{p}{2}).$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

On la suppose à présent vraie au rang n . Soit $x \in I$ et $p \in [0, \frac{2^{n+1}-1}{2}]$ tel que $\frac{p}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{p+1}{2^{n+1}}$. Si $p = 4q$, on a : $\frac{2q}{2^n} \leq x \leq \frac{2q}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$ donc : $f^n(x) = 2^n x - 2q \in [0, \frac{1}{2}]$ et :

$$f^{n+1}(x) = (-1)^p 2^{n+1} x - (-1)^p 2E(\frac{p}{2}).$$

Si $p = 4q + 1$, on a : $\frac{4q+1}{2^{n+1}} = \frac{2q}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{4q+2}{2^{n+1}} = \frac{2q+1}{2^n}$ donc $x \in [\frac{2q}{2^n}, \frac{2q+1}{2^n}]$.

Ainsi $f^n(x) = 2^n x - 2E(q) = 2^n x - 2q$ et $f^n(x) \in [2q + 1 - \frac{1}{2} - 2E(q), 2q + 1 - 2E(q)]$.

Il vient :

$$f^{n+1}(x) = 2 - 2^{n+1} x + 4q = (-1)^p 2^{n+1} x - (-1)^p 2E(\frac{p}{2}).$$

Les cas $p \equiv 2(4)$ et $p \equiv 3(4)$ se traitent de la même façon.

• L'application f vérifie (C_0) .

L'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{2^n}$ ($0 \leq p \leq 2^n$) est dense dans $[0, 1]$ donc si $]r, s[$ est un intervalle contenu dans I , on peut prendre n et p tels que $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}] \subset]r, s[$, ce qui implique $f^n([r, s]) = [0, 1]$.

C] Le théorème de Sarkovskii, version faible

a) On renverse les inclusions du "petit" Brouwer.

Lemme 1 : Toute fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $I \subset f(I)$, possède un point fixe.

Preuve : On suppose que l'application continue $g : x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur I , elle garde donc un signe constant (par exemple strictement positif) sur I . Il vient :

$$\forall 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq x < f(x),$$

ce qui implique $0 \notin f(I)$. Contradiction avec $I \subset f(I)$.

b) Encore du TVI

Lemme 2 : Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et K un segment inclus dans $f(J)$. Alors K est atteint par f , ie il existe un segment $L \subset J$ tel que $f(L) = K$.

Soit $K = [m, M]$ un segment inclus dans $f(J)$. Il existe $(a, b) \in J^2$ tel que $f(a) = m$ et $f(b) = M$. On suppose $m < M$, $a < b$ (analogue si $b < a$). Soit $U = \{x \in [a, b], f(x) = m\}$. U est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($a \in U$) et majorée, donc possède une borne supérieure notée α . Par continuité de f , U est fermé dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in U$. On remarque par ailleurs que $\alpha < b$. Soit à présent $V = \{x \in [\alpha, b], f(x) = M\}$ et $\beta = \inf V = \min V$. L'image de $[\alpha, \beta]$ par l'application continue f est un segment de $\mathbb{R}$ qui contient m et M , donc $[m, M] \subset f([\alpha, \beta])$. Soit à présent $x \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(x) \notin [m, M]$. Si $f(x) > M$, alors il existe via le théorème des valeurs intermédiaires $c \in]\alpha, x[$ tel que $f(c) = M$, ce qui est contradictoire avec le statut de β . De même, la situation $f(x) < m$ est impossible. Finalement, $f([\alpha, \beta]) \subset [m, M]$ et par doubles inclusions, $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$.

c) Enoncé du théorème de Sarkovskii

Si l'application $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle J admet un cycle d'ordre 3, alors pour tout entier $n \geq 1$, elle admet un élément d'ordre n .

Effectivité du cas : Pour $a < b < c$ dans $\mathbb{R}$, considérer le polynôme f (interpolateur de Lagrange) de degré inférieur ou égal à 3 défini par $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$.

d) Preuve (cf Cours d'analyse, P. Doukhan, J.C. Sifre, Dunod)

Soit $a < b < c$ dans J tels que $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$[b, c] \subset f([a, b]) \quad ; \quad [a, b] \cup [b, c] = [a, c] \subset f([b, c]) .$$

- Existence d'un cycle d'ordre 1 pour f .

$f|_{[b, c]}$ est continue sur le segment $[b, c]$ avec $[b, c] \subset f([b, c]) = [a, c]$ donc f admet un point fixe dans $[b, c]$ d'après le lemme 2.

- Existence d'un cycle d'ordre 2 pour f .

On veut $r \in J$ tel que $f^2(r) = r$ sans que $f(r) = r$. On pose $K_0 = [b, c]$. On a $K_0 = [b, c] \subset f([a, b])$ donc on peut envisager d'après le lemme 1, un segment K_1 inclus dans $[a, b]$ tel que $f(K_1) = K_0$. A présent, puisque $K_1 \subset [a, b] \subset f(K_0)$, on trouve $K_2 \subset K_0$ tel que $f(K_2) = K_1$. $f^2|_{K_2}$ est continue sur le segment K_2 avec $K_2 \subset f^2(K_2)$ donc f^2 admet un point fixe r dans K_2 . Si $f(r) = r$, alors $r \in K_1 \cap K_2$, donc $r = b$, Impossible puisque $f(b) = c \neq b$.

- Existence d'un n -cycle ($n > 3$).

Etape 1 : Construction d'une "boucle de segments emboîtés par f ".

On pose $I_0 = [a, b]$, $I_1 = [b, c]$ et on rappelle que $I_1 \subset f(I_0)$ et $I_0 \cup I_1 \subset f(I_1)$. On construit une suite $K_0, K_1, \dots, K_n$ de segments tels que :

1. $K_0 = I_1 = [b, c]$ (initialisation)
2. $K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_{n-2}$ et $f(K_i) = K_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$.
3. $K_{n-1} \subset I_0 = [a, b]$ (rupture de la chaîne d'inclusion)
4. $K_n \subset K_0$ (retour vers $K_0 = I_1 = [b, c]$)

$K_0 \subset f(K_0)$ donc on choisit K_1 segment inclus dans K_0 tel que $f(K_1) = K_0$. Par récurrence jusqu'à $i = n - 3$, si $K_i \subset K_{i-1}$ et $f(K_i) = K_{i-1}$, alors K_i est atteint par f : on choisit un segment K_{i+1} tel que $f(K_{i+1}) = K_i$ et $K_{i+1} \subset K_i$.

$K_{n-2} \subset K_0 = I_1$ et $I_1 \subset f(I_0)$ donc le segment K_{n-2} est atteint par f : on prend un segment $K_{n-1} \subset I_0$ tel que $f(K_{n-1}) = K_{n-2}$. Enfin, $K_{n-1} \subset I_0 = [a, b]$ et $I_0 \subset f(K_0)$ donc il existe un segment $K_n \subset K_0$ tel que $f(K_n) = K_{n-1}$.

Etape 2 : $b \notin K_{n-1}$, ce qui implique $K_{n-1} \cap K_0 = \emptyset$.

Si $b \in K_{n-1}$, $f(b) = c \in K_{n-2}$ et $f(c) = a \in K_{n-3} \subset K_0 = [b, c]$. Absurde!

Etape 3 : Conclusion

L'application f^n applique K_n dans K_0 et on a $K_n \subset K_0$ donc f^n admet un point fixe dans K_n noté r . Si l'ordre de r est $k < n$, $f^k(r) = r$ donne $f^{k+1}(r) = f(r)$. Ainsi, $f^{k+1}(r) \in K_{n-(k+1)} \subset K_0$ et $f^{k+1}(r) \in K_{n-1}$, impossible puisque $K_{n-1} \cap K_0 = \emptyset$. L'ordre de r est donc exactement n .

4- Application du TVI en vrac

a) Exercice 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue de valeur moyenne $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Alors f admet un point fixe.

Preuve :

- Avec les valeurs intermédiaires :

Par l'absurde, l'application $g : x \mapsto f(x) - x$ continue sur I garde un signe constant sur I (strictement positif par exemple) : $\forall x \in I \quad f(x) > x$. Avec f continue, par "intégration d'inégalités strictes", $\int_0^1 f > \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Contradiction.

- "Sur un air de Rolle and Rolle" :

On veut montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ s'annule sur I . L'application $G : x \mapsto \int_0^x f - \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur I de dérivée g (car f est continue sur I), vérifie par ailleurs $G(0) = G(1) = 0$, et la conclusion est aisée.

b) Exercice 2 : Soit f une fonction continue et *décroissante* de J dans J , où J est un *intervalle quelconque*. Alors f possède un *unique* point fixe.

L'unicité est une conséquence de la stricte décroissance de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J . Soit $x_0 \in J$. On suppose $f(x_0) > x_0$. On a $f(f(x_0)) \leq f(x_0)$. Si il y a égalité dans l'inégalité, $f(x_0)$ est un point fixe de f . Sinon, l'application continue g change de signe sur $[x_0, f(x_0)]$ donc s'annule avec le TVI.

Peut-on remplacer "décroissante" par "croissante"? Penser à $x \mapsto x^2$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, ou à $x \mapsto \sin x$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

c) Exercice 3 Soit f et g deux applications continues de $I = [0, 1]$ dans I .

On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

(1) Il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

(2) Si on suppose de plus que f est croissante sur I , alors f et g ont un point fixe commun.

(3) Si on suppose que f est décroissante sur I , alors l'unique point fixe l de f est aussi un point fixe de g .

Pour (1) : Par l'absurde, l'application continue $f - g$ ne s'annule pas sur I , donc par le TVI, on peut supposer $f < g$ sur I . L'ensemble $\text{Fix}(f)$ des points fixes de f étant non vide, majoré et fermé dans $\mathbb{R}$ (continuité de f), on considère à bon droit son plus grand élément l . On remarque que : $f(g(l)) = g(f(l)) = g(l)$, donc $g(l) \in \text{Fix}(f)$. L'inégalité $l = f(l) < g(l)$ conduit alors à une contradiction.

Pour (2) : Soit a un point fixe de g . Par croissance de f , la suite $(f^n(a))$ est monotone donc converge puisqu'elle est par ailleurs bornée. Par continuité de f , sa limite est nécessairement un point fixe l de f . On vérifie facilement que pour tout entier $n \geq 1$, $f^n(a) = g(f^n(a))$, puis par continuité de g , on obtient $l = g(l)$ en passant à la limite. D'où le résultat.

Pour (3) : On a $g(l) = g(f(l)) = f(g(l))$ donc $g(l)$ est un point fixe de f et par unicité, $g(l) = l$.

d) Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la suite $\left(\frac{a+f(a)+\dots+f^n(a)}{n+1}\right)$ notée (v_n^a) soit bornée. Alors f possède un point fixe.

On raisonne par l'absurde ; Avec f continue sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > x$ ou $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < x$. La suite $f^n(a)$ est alors strictement monotone, et admet une limite L dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par le lemme de Césaro, la suite (v_n^a) tend aussi vers L en $+\infty$. Avec (v_n^a) bornée, L est nécessairement un réel. Puisque f est continue et $(f^n(a))$ converge (vers L), L est un point fixe de f .

5- Caractérisation des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ convergentes

J désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow J$ une application continue sur J . Soit (u_n) une suite récurrente associée à f , qui admet une unique valeur d'adhérence. Alors la suite (u_n) converge.

Il suffit de montrer que (u_n) est bornée ; Pour cela, on raisonne par l'absurde. Soit l l'unique valeur d'adhérence de (u_n) et K le segment $[l-1, l+1]$. Pour $N \in \mathbb{N}$ (aussi grand que souhaité d'avance), on choisit $p > N$ tel que $u_p \in K$, et puisque (u_n) n'est pas bornée, on peut considérer $q > p > N$ tel que $u_q \notin K$. En parcourant les termes $u_p, u_{p+1}, \dots, u_q$, on peut trouver un indice $m > p > N$ tel que $u_m \notin K$ et $u_{m-1} \in K$. L'égalité $u_m = f(u_{m-1})$ assure par ailleurs que $u_m \in f(K) \setminus K$. On peut donc envisager une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ de (u_n) à valeurs dans $f(K) \setminus K$. Puisque l'image continue de K par f est un segment de $\mathbb{R}$, $(u_{\phi(n)})$ est bornée et possède donc une valeur d'adhérence l' . L'inégalité $|u_{\phi(n)} - l| > 1$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ impose $|l' - l| \geq 1$. Ainsi l' est une valeur d'adhérence de (u_n) différente de l . Contradiction.

Exercice : Soit $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ une fonction continue et (u_n) une suite récurrente associée à f . On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, et tels que les suites $(\exp(iau_n))$ et $(\exp(ib u_n))$ convergent. Montrer que (u_n) converge.

La suite (u_n) est bornée puisqu'à valeurs dans I , donc possède au moins une valeur d'adhérence. Reste à voir qu'elle n'en possède qu'une seule. Par l'absurde, soit λ, μ deux valeurs d'adhérence distinctes et $(u_{\phi(n)}), (u_{\psi(n)})$ deux sous-suites de limite λ et μ . Puisque $(\exp(iau_n))$ converge, les sous-suites $(\exp(iau_{\phi(n)}))$ et $(\exp(iau_{\psi(n)}))$ convergent, vers la même limite. D'où $\exp(ia\lambda) = \exp(ia\mu)$, $a\lambda = a\mu + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $a(\lambda - \mu) = 2k\pi$. De même, $b(\lambda - \mu) = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}^*$. De là : $\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$. Contradiction puisque $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Troisième partie

Itérations

Pour $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ continue sur I , on rappelle que l'ensemble des points fixes de f noté $\mathcal{F}ix(f)$ est non vide. On note (u_n^a) la suite récurrente initialisée en $a \in I$ de fonction génératrice f . L'ensemble des valeurs de (u_n^a) est l'orbite $\mathcal{O}(f, a)$ de a par f . On note $\omega(f, a)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n^a) , on désigne par $\mathcal{C}v(f)$ l'ensemble des réels a tels que la suite (u_n^a) converge. On définit sur $\mathcal{C}v(f)$ une relation d'équivalence de la façon suivante : $a \mathcal{R} b$ si et seulement si (u_n^a) et (u_n^b) convergent vers le même point fixe r de f . La classe d'équivalence de a est appelée bassin d'attraction de r , et $\mathcal{F}ix(f)$ forme une section de $\mathcal{C}v(f)$ pour la relation $\mathcal{R}$.

1]Caractérisation des éléments de $\mathcal{C}v(f)$.

Toute suite (u_n^a) du segment I , quasi-fixe pour f ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^a - u_n^a = 0$), converge vers un point fixe de f .

Preuve

Lemme préliminaire : Soit $u = (u_n)$ une suite réelle bornée, à croissance lente ie telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Alors l'ensemble ω des valeurs d'adhérence de u est un segment de $\mathbb{R}$.

Preuve du lemme : On sait déjà que ω est non vide, fermée et bornée dans $\mathbb{R}$. Reste à voir que ω est convexe. Soit $b < d$ dans ω et $c \in]b, d[$. Comment construire une sous-suite de u qui converge vers c ?

- On pose $\Gamma^- = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq c\}$. Γ^- est une partie infinie de $\mathbb{N}$ (sinon b ne peut être une valeur d'adhérence de u), de même pour son complémentaire $\Gamma_+ = \{n \in \mathbb{N}; u_n > c\}$ dans $\mathbb{N}$.
- Il existe une infinité d'entiers N dans Γ^- dont le consécutif $N + 1$ appartient à Γ_+ . En effet, pour N_0 choisi dans Γ^- (aussi grand que souhaité d'avance), $\{p \in \Gamma_+; p \geq N_0\} = \{p \in \Gamma_+; p > N_0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (puisque Γ_+ est infini), donc admet un minimum $N + 1 \in \Gamma_+$ (strictement supérieur à N_0). N qui vérifie $N \geq N_0$, est dans Γ^- (sinon contradiction avec le statut de $N + 1$).
- On a montré que la partie $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq c \leq u_{n+1}\}$ de $\mathbb{N}$ est infinie et clairement

$$\forall n \in \Lambda \quad 0 \leq c - u_n \leq u_{n+1} - u_n.$$

Puisque $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0, la sous-suite $(u_n)_{n \in \Lambda}$ converge vers c .

Retour à la preuve : On raisonne par l'absurde, on suppose que $u = (u_n^a)$ diverge. u bornée possède au moins une valeur d'adhérence d'après Bolzano-Weierstrass et u bornée divergente admet au moins deux valeurs d'adhérence $b < d$ dans I d'après la caractérisation des suites réelles bornées convergentes. Soit $c \in [b, d] \subset \omega(f, a)$ et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de limite c . Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)+1} = u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)}$ donc par passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)+1} = c$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(c)$ (continuité de f en c). On a montré que la valeur d'adhérence c est un point fixe de f . On choisit à présent à bon droit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}^a \in]b, d[$. $u_{n_0}^a$ est à son tour un point fixe de f donc (u_n^a) stationne à partir du rang n_0 . Contradiction.

Remarque : $I = [0, 1]$ peut être remplacé par n'importe quel segment de $\mathbb{R}$ dans la preuve ci-dessus.

Exercice : Soit $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ une application continue et $a \in I$. Puisque f est à valeurs dans le convexe I , on considère à bon droit la suite (x_n) de premier terme a , définie par : $x_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})x_n + \frac{1}{n}f(x_n)$. Alors la suite (x_n) converge vers un point fixe de f .

On raisonne par l'absurde en supposant que la suite réelle bornée (x_n) admet deux valeurs d'adhérence $b < d$. On montre comme ci-dessus que tout point de $]b, d[$ est une valeur d'adhérence de (x_n) et un point fixe de f , ce qui amène une contradiction et assure la convergence de (x_n) . On appelle l sa limite qui appartient au fermé $[0, 1]$. Si l n'est pas un point fixe de f , l'égalité $x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n) - x_n}{n}$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donne l'équivalent $x_{n+1} - x_n \sim \frac{f(l) - l}{n}$, avec $\left(\frac{f(l) - l}{n}\right)$ de signe constant. D'où la divergence de $\sum (x_{n+1} - x_n)$ et de (x_n) . Contradiction.

Un classique des concours : Soit $\alpha \in]-1, 1[$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = \alpha \sin u_n + \beta$ converge.

On remarque d'abord que la suite réelle (u_n) est bornée donc à valeurs dans un *segment* de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \alpha[\sin u_n - \sin u_{n-1}] = \alpha(u_n - u_{n-1}) \cos w_n$$

avec $w_n \in]u_{n-1}, u_n[$ ou $w_n \in]u_n, u_{n-1}[$. Delà : $|u_{n+1} - u_n| \leq |\alpha| |u_n - u_{n-1}|$, puis par récurrence, $|u_{n+1} - u_n| \leq |\alpha|^n |u_1 - u_0|$. Puisque $|\alpha| < 1$, la suite bornée (u_n) est quasi-fixe pour $x \mapsto \alpha \sin x + \beta$ donc converge. On peut aussi conclure avec un autre argument : par comparaison, $\sum u_{n+1} - u_n$ converge absolument dans $\mathbb{R}$ complet donc converge, ce qui assure la convergence de la suite (u_n) .

Exercice : Soit $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ continue et $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ tels que :

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq \beta (|f(x) - x| + |f(y) - y|).$$

Alors f admet un unique point fixe dans I .

L'unicité ne pose pas de problème. Pour l'existence, on met en oeuvre le schéma des approximations successives : soit $a \in I$ et (u_n) la suite de germe a et de fonction génératrice f . On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{\beta}{1 - \beta}\right)^n |u_1 - u_0|,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) de I est quasi-fixe pour f puisque $0 < \frac{\beta}{1 - \beta} < 1$.

2] Ensemble limite $\omega(f, a)$

(cf page personnelle ou article-RMS-1996 de H. Lehnig)

A-t-on $\omega(f, a) \subset \text{Fix}(f)$?

Considérer $f : x \mapsto 1 - x$ de I dans I , dont $\frac{1}{2}$ est l'unique point fixe. Les réels $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$ sont échangés par f donc la suite récurrente initialisée en a et générée par f admet a et b comme valeurs d'adhérence.

Propriété : Soit $a \in I$. L'ensemble limite $\omega(f, a)$ des valeurs d'adhérence de la suite (u_n^a) est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ (déjà vu), invariante par f .

Preuve : Soit $t \in \omega(f, a)$, $(f^{\varphi(n)}(a))$ une sous-suite de (u_n^a) de limite t . Par continuité de f , la suite $(f^{\varphi(n)+1}(a))$ converge vers $f(t)$, ce qui montre que $\omega(f, a)$ est stable par f . Pour établir l'inclusion $\omega(f, a) \subset f(\omega(f, a))$, on envisage la suite $(f^{\varphi(n)-1}(a))$ de points du compact I , et on en extrait une sous-suite convergente $(f^{\varphi \circ \psi(n)-1}(a))$, de limite u . A présent, la suite $(f^{\varphi \circ \psi(n)}(a))$ qui converge vers t , converge aussi vers $f(u)$, d'où le résultat.

Remarque : Si l'ensemble limite $\omega(f, a)$ est fini, la restriction de f à $\omega(f, a)$ est une permutation de $\omega(f, a)$.

Application : Théorème d'Edelstein

Soit $f : I = [0, 1] \rightarrow I$ une contraction forte ie une application vérifiant

$$\forall x, y \in I \quad x \neq y \Rightarrow |f(y) - f(x)| < |y - x|.$$

- L'application f clairement continue possède un point fixe l ("petit" Brouwer) et la condition de forte contractance implique facilement l'unicité de l .
- Pour tout $a \in I$, la suite $(u_n^a) = (f, a)$ converge vers l .

Il suffit de vérifier que la suite (u_n^a) (réelle bornée) possède une unique valeur d'adhérence. On pose $\alpha = \inf \omega(f, c) = \min \omega(f, c)$ et $\beta = \max \omega(f, c)$. Puisque $\omega(f, c)$ est f -invariante, on choisit α' et β' dans $\omega(f, c)$ tels que $\alpha = f(\alpha')$ et $\beta = f(\beta')$. Si $\beta \neq \alpha$, $|\beta - \alpha| < |\beta' - \alpha'|$, ce qui est impossible puisque $(\alpha', \beta') \in [\alpha, \beta]^2$. cqfd

Propriété : L'ensemble $\omega(f, a)$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux compacts non vides f -invariants.

Preuve : On raisonne par l'absurde, on commence par supposer que $\omega(f, a)$ s'écrit $R \cup S$ où R et S sont deux compacts non vides invariants par f .

Lemme : Pour $\varepsilon > 0$, on pose $R_\varepsilon = \bigcup_{r \in R}]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$ (et de même S_ε). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $R_{\varepsilon_0} \cap S_{\varepsilon_0} = \emptyset$.

Par l'absurde, on peut envisager une suite (r_n) de points de R , une suite (s_n) de points de S et une suite (x_n) de points du compact I telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_n - r_n| < \frac{1}{n} \quad ; \quad |x_n - s_n| < \frac{1}{n}.$$

Soit x une valeur d'adhérence de (x_n) . Les inégalités ci-dessus assurent que x est aussi une valeur d'adhérence de (r_n) et (s_n) , donc x appartient aux fermés R et S . Contradiction puisque R et S sont disjoints.

Lemme : $\forall \delta > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0 \quad u_n \in R_\delta \cup S_\delta.$

Par l'absurde, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) qui se trouvent hors d'un certain $R_\delta \cup S_\delta$. On peut alors envisager une valeur d'adhérence l de (u_n) dans le fermé $I \setminus (R_\delta \cup S_\delta)$. Contradiction puisque $l \notin \omega(f, a) = R \cup S$.

Fin de la preuve : L'application f est uniformément continue sur I d'après le théorème de Heine, donc on choisit $\delta \in]0, \varepsilon_0[$ tel que

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon_0.$$

Puisque tous les termes de (u_n) sont à partir d'un certain rang dans $R_\delta \cup S_\delta$, on choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = f^n(a) \in R_\delta$ et $u_{n+1} = f(u_n) \in S_\delta \subset S_{\varepsilon_0}$. Soit r dans R tel que $|u_n - r| < \delta$. Il vient $|f(u_n) - f(r)| < \varepsilon_0$, et avec R f -invariant, $f(u_n)$ appartient à R_{ε_0} . Absurde puisque $R_{\varepsilon_0} \cap S_{\varepsilon_0} = \emptyset$.

corollaire : Si l'ensemble limite $\omega(f, a)$ est fini, alors $\omega(f, a)$ est une orbite cyclique pour f .

La restriction de f à $\omega(f, a)$ est une permutation de $\omega(f, a)$, elle se décompose en cycles à supports disjoints et la propriété précédente montre qu'une décomposition non triviale est impossible.

Quatrième partie

Homéomorphismes et points fixes

a) Existe-t-il un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ sans point fixe ?

Considérer $x \mapsto x + 1$.

b) Pour a dans $\mathbb{R}$, construire une involution continue de $\mathbb{R}$ admettant a comme point fixe.

Considérer l'application affine $x \mapsto -x + 2a$.

c) Involution continue f de $\mathbb{R}$ et points fixes

f est continue, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ de bijection réciproque $f^{-1} = f$ donc f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

• Premier cas : f est strictement croissante.

Alors $f = id_{\mathbb{R}}$. En effet, si $x < f(x)$, $f(x) < f(f(x)) = x$. Impossible. L'inégalité $f(x) < x$ conduit de la même façon à une contradiction.

• Deuxième cas : f est strictement décroissante. Avec le théorème de la limite monotone et le caractère non majoré de f , on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$. De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$. On envisage à présent $g = id_{\mathbb{R}} - f$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. g est donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$ et avec $\lim_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$, on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Enfin, 0 ne possède qu'un seul antécédent par la bijection g , ce qui donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f .

d) Un joli exercice de concours (cf Les maths en tête, Gourdon, Ellipse)

Soit $f : I \rightarrow I$ continue et bijective telle que :

$$\forall x \in I \quad 0 \leq 2x - f(x) \leq 1 \text{ et } f(2x - f(x)) = x.$$

• **Vérifier que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.**

$\forall x \in I \quad 0 \leq 2x - f(x) \leq 1$ donc $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x$. Ainsi $f(0) \leq 0$ et $f(1) \geq 1$, d'où les résultats.

• **Vérifier que f est croissante sur I .**

f , bijection continue de source I compacte sur I , est un homéomorphisme de l'intervalle I sur I , donc f est un "isomorphisme des structures d'ordre" ie f est strictement monotone, et avec $f(0) < f(1)$, f est strictement croissante sur I .

• **Vérifier que $f = id_I$.**

Soit $a \in I$. On veut $f(a) = a$. On met en oeuvre le schéma des approximations successives. Soit (x_n) la suite récurrente de premier terme a et de fonction génératrice f . Pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2}$ donc $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$ ((x_n) suite arithmétique). Ainsi, $\forall n \geq 1 \quad x_n - x_0 = n(x_1 - x_0)$. Puisque (x_n) à valeurs dans I est bornée, $x_1 = x_0$, ce qui donne bien $f(a) = a$.

e) Autre exercice : Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue telle que $f^2 = f \circ f = f$. On note $\mathcal{F}ix$ l'ensemble (non vide) des points fixes de f .

• **Exemple d'une telle fonction, autre que l'identité id**

L'application f définie par $f(x) = \frac{1}{4}$ si $x \in [0, \frac{1}{4}]$, $f(x) = x$ si $x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $f(x) = \frac{3}{4}$ si $x \in [\frac{3}{4}, 1]$, convient...

• **$\mathcal{F}ix$ est un segment de $\mathbb{R}$.**

Pour $x \in I$, $f[f(x)] = f(x)$ donc $f(x) \in \mathcal{F}ix(f)$, donc $f(I) \subset \mathcal{F}ix(f)$. L'inclusion $\mathcal{F}ix(f) \subset f(I)$ est claire, d'où le résultat avec f continue et I compact. $\mathcal{F}ix(f)$ est donc de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

• **Convergence uniforme de (f^n) sur I .**

Pour $a \in I$, $f(a)$ est un point fixe de f donc la suite numérique $(f^n(a))$ stationne à $f(a)$ à partir du rang 1, ce qui assure la convergence simple et uniforme de (f^n) vers f .

• **Si f est dérivable sur I , alors $f = id$.**

$f(I) = [\alpha, \beta]$ donc $\forall x \in I \quad f(x) \geq \alpha = f(\alpha)$. (f présente sur I un minimum en α). Si $0 < \alpha$ (α point intérieur de I), $f'(\alpha) = 0$. Or l'égalité $f(x) = x$ valable sur $[\alpha, \beta]$ donne $f'(\alpha) = 1$. Contradiction. On montre aussi par l'absurde que $\beta = 1$.

f) Exercice Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \neq Id$ et $f^2 = 2f - Id$. On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = Id + r$. (cf RMS-Juin-1992)

Première partie

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note (u_n^x) la suite $(f^n(x))$.

- (u_n^x) est arithmétique et $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^x}{n} = f(x) - x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit : $f^2(f^n(x)) = 2f(f^n(x)) - f^n(x)$

donc $u_{n+2}^x - u_{n+1}^x = u_{n+1}^x - u_n^x$. Ainsi, (u_n^x) est une suite arithmétique de raison $r_x = f(x) - x$.

- f est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$.

On a $f^2(x) = f^2(y)$ donc $x = f^2(x) - 2f(x) = f^2(y) - 2f(y) = y$, ce qui donne l'injectivité de f .

L'application f continue et injective est strictement monotone, donc f^2 croît strictement et aussi $f = \frac{1}{2}(f^2 + Id)$. Ainsi, f continue et strictement croissante réalise un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ sur son image.

Par le théorème de la limite monotone, f possède une limite (finie ou non) en $+\infty$. Si cette limite est finie, par continuité de f , f^2 possède aussi une limite finie en $+\infty$, et même $Id = 2f - f^2$. Absurde ! On vérifie aussi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, et puisque f est continue et croissante, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- La suite de germe $f(x)$ générée par f^{-1}

On montre que f^{-1} vérifie la même équation fonctionnelle que f ; Pour $y \in \mathbb{R}$, on veut $f^{-2}(y) = 2f^{-1}(y) - y$. On choisit à bon droit $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f^2(x)$ et on écrit $f^{-2}(y) = x = 2f(x) - f^2(x) = 2f^{-1}(y) - y$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note (v_n^x) la suite de terme général $(f^{-1})^n(f(x))$. On montre facilement que (v_n^x) est arithmétique de raison $x - f(x)$. Aussi, $(\frac{v_n^x}{n})$ converge vers $x - f(x)$.

Deuxième partie

Quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > x_0$. On note $\Omega =]\alpha, \beta[$ la composante connexe de x_0 dans l'ouvert $\{f > Id\}$.

- Ω est f -stable.

Si $\beta = +\infty$, on écrit pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, $x_0 < f(x_0) < f(x)$ donc $f(x) \in [x_0, +\infty[\subset \Omega$. Si β est un nombre réel, on vérifie que β est un point fixe de f . En effet, pour tout $x \in [x_0, \beta[$, $f(x) > x$ et par continuité de f en β , on a $f(\beta) \geq \beta$. En sens inverse, si $f(\beta) > \beta$, toujours par continuité de f , on choisit $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]\beta - \eta, \beta + \eta[$ $f(x) > x$, ce qui donne $\beta + \eta \in \Omega$ et contredit le statut de β . Un raisonnement analogue avec la borne α permet de conclure.

- **On a : $\Omega = \mathbb{R}$.**

Puisque Ω est f -stable, Ω contient tous les termes de la suite $(u_n^{x_0})$. Or $(u_n^{x_0})$, suite arithmétique de raison $f(x_0) - x_0 > 0$, tend vers $+\infty$. Donc $\beta = +\infty$. Si α est un nombre réel, $f(\alpha) = \alpha$, $f(\Omega) = f(] \alpha, +\infty[) =] \alpha, +\infty[$ donc $f^{-1}(] \alpha, +\infty[) =] \alpha, +\infty[$. L'intervalle $] \alpha, +\infty[$ contient alors tous les termes de la suite arithmétique $(v_n^{x_0})$ qui tend vers $-\infty$. Absurde !

- **L'application $f - Id$ est constante.**

Il suffit de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f - Id$ est constante sur $[x, +\infty[$. On procède en deux temps :

1. Pour $y \in [x, f(x)]$, et $n \geq 1$, on a par croissance de f :

$$\frac{f^n(x)}{n} \leq \frac{f^n(y)}{n} \leq \frac{f^{n+1}(x)}{n} = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} \frac{n+1}{n}$$

et par passage à la limite, $f(x) - x = f(y) - y$.

2. Comme la suite arithmétique (u_n^x) tend vers $+\infty$, on reprend le raisonnement ci-dessus dans $[f(x), f^2(x)]$, ... pour obtenir le résultat annoncé.

Cinquième partie

Le théorème du point fixe de Picard

1- Un énoncé pratique dans $\mathbb{R}$.

Picard 1 : Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application vérifiant :

$$\exists k \in [0, 1[\quad \forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

On dit que f est une contraction stricte sur $[a, b]$. Alors

1. f admet un unique point fixe, noté r , sur $[a, b]$.
2. Pour c quelconque dans $[a, b]$, $(f^n(c))$ converge vers r . Autrement dit, le bassin d'attraction de r est $[a, b]$.
3. Contrôle de l'algorithme : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f^n(c) - l| \leq \frac{k^n}{1-k} |f(c) - c|$.
 $(f^n(c))$ converge plus vite qu'une suite géométrique de raison k .

Remarque : La suite de fonctions (f^n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction constante l .

En effet, pour tout $c \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |f^n(c) - l| &\leq \frac{k^n}{1-k} |f(c) - c| \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \left\{ |f(c) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)| + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a+b}{2} - c\right| \right\} \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \left\{ 2 \times \left|\frac{a+b}{2} - c\right| + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \right\} \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} \left\{ 2 \times \frac{b-a}{2} + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \right\}. \text{ D'où le résultat.} \end{aligned}$$

Pour 1 : L'existence d'un point fixe pour f est ici évidente avec le "petit" théorème de Brouwer.

Maintenant, si f admet deux points fixes r et s dans $[a, b]$, on a $|s - r| \leq k |s - r|$ avec $0 \leq k < 1$, ce qui impose $s = r$ et l'unicité du point fixe de f est facilement prouvée.

Pour 2 : Soit $u = (u_n)$ la suite récurrente associée à (f, c) . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit : $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k |u_n - u_{n-1}|$ et par récurrence, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ (inégalité ★). Avec $0 \leq k < 1$, par comparaison, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$ complet donc converge. On en déduit que la suite (u_n) à valeurs dans le fermé $[a, b]$ converge dans $[a, b]$, nécessairement vers le point fixe de l'application continue f .

Pour 3 : Pour n et p dans $\mathbb{N}$, ★ et l'inégalité triangulaire donnent :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - u_{n+p-1}| + \dots + |u_{n+1} - u_n| \leq (k^{n+p-1} + \dots + k^n) |u_1 - u_0|$$

d'où : $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n(1-k^p)}{1-k} |u_1 - u_0|$. Un passage à la limite ($p \rightarrow +\infty$) donne alors $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$.

Cas particulier important

On quitte le cadre topologique en ajoutant une hypothèse différentielle :

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dérivable sur $[a, b]$ telle que :

$$\exists k \in [0, 1[\quad \forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| \leq k.$$

Alors f admet un unique point fixe dont le bassin d'attraction est $[a, b]$.

La preuve est immédiate via l'inégalité des accroissements finis.

Exercice : Exemple de fonction f contractante sur un segment f -stable et non dérivable sur ce segment : Considérer $f : x \in [-1, 1] \rightarrow |\frac{1}{2}x|$.

Exemples d'application de Picard 1

1) On étudie la suite donnée par $u_0 \in [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

L'application $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ est deux fois dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Avec $f'' \geq 0$ sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, f' croît ; Puisque $f'(\sqrt{2}) = 0$, f' est positive, donc f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. On vérifie que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ et $f(\frac{3}{2}) = \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$ donc $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$ est f -stable. Par ailleurs, pour tout $x \in [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Par l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$. Toutes les conditions de Picard 1 sont remplies donc la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe $\sqrt{2}$ de f .

2) On étudie la suite donnée par $u_0 \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et $u_{n+1} = |u_n^2 - \frac{1}{4}|$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $f(x) = |x^2 - \frac{1}{4}|$.

- On vérifie facilement que les points fixes de f sont $\alpha = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
 - L'application f est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, et puisque $f(0) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, on a $f([0, \frac{\sqrt{2}}{2}]) = [0, \frac{1}{4}]$.
- On pose $I = [0, \frac{1}{4}]$.
- Avec f décroissante sur I , on a $f(I) = [f(\frac{1}{4}), f(0)] = [\frac{3}{16}, \frac{1}{4}]$, donc le segment I est f -stable.
 - f est dérivable sur $[0, \frac{1}{4}[$ et dérivable à gauche en $\frac{1}{4}$, avec $f'(x) = -2x$. Puisque $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur I , f est $\frac{1}{2}$ -contractante.

En vertu de Picard 1, (u_n) converge vers le seul point fixe de f dans I qui est $\alpha = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Que se passe-t-il si on choisit u_0 dans $] \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} [$?

$J = [0, \frac{1+\sqrt{2}}{2} [$ est f -stable (facile) donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in J$. Un schéma soigné où figurent la courbe représentative de f et la première bissectrice, suggère qu'il existe au moins un entier N tel que $u_N \in I$, et puisque I est f -stable, on est alors ramené au cas précédent.

On raisonne par l'absurde en faisant l'hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in] \frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} [$. Comme $f(x) \leq x$ sur cet intervalle, (u_n) est décroissante, et minorée par $\frac{1}{4}$, (u_n) converge. Sa limite doit être un point fixe de f , ie soit $\alpha = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ (impossible puisque α n'est pas adhérent à $] \frac{1}{4}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} [$), soit $\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (impossible car (u_n) décroît avec $u_0 < \beta$). Contradiction et résultat.

2- Un énoncé plus général

Picard 2 : Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ et $f : F \rightarrow F$ une contraction stricte sur F . Alors f admet un unique point fixe r dans F et pour tout c dans F , $(f^n(c))$ converge vers r avec $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f^n(c) - r| \leq \frac{k^n}{1-k} |f(c) - c|$.

Remarque 1 : L'hypothèse " F fermé de $\mathbb{R}$ " est essentielle. Considérer $f : [\sqrt{2}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q} \rightarrow [\sqrt{2}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $\frac{1}{2}$ -contractante et pourtant sans point fixe dans $[\sqrt{2}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q}$.

Remarque 2 : Il peut arriver que $f : F \rightarrow F$ ne soit pas strictement contractante sur le fermé F de $\mathbb{R}$ mais que f possède une itérée f^p ($p \geq 2$) strictement contractante. Dans ces conditions, f possède encore un unique point fixe dans F , obtenu par approximations successives.

Justification : Picard 2 assure que f^p possède un unique point fixe r dans F . Par ailleurs $f(f^p(r)) = f(r)$ donc $f^p(f(r)) = f(r)$ et par unicité du point fixe de f^p , $f(r) = r$. Si s est un point fixe de f , s est aussi un point fixe de f^p et toujours par unicité, $s = r$. Enfin pour $c \in F$ et $0 \leq r \leq p-1$, les p suites de terme général $f^{pn+r}(c) = f^{pn}(f^r(c)) = (f^p)^n(f^r(c))$ converge vers r , donc $(f^m(c))_m$ converge vers r .

Exemple : Considérer $f : F = [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow F$ définie par $f(x) = \cos x$.

On vérifie facilement que $\|f'\|_\infty = 1$ alors que $\|(f^2)'\|_\infty = \sin 1 < 1$.

Remarque 3 : On peut adapter la preuve de *Picard 2* pour établir le théorème du point fixe de Picard : dans un espace métrique complet E , une contraction stricte d'un fermé F de E à valeurs dans F admet un unique point fixe obtenu par approximations successives.

Exercice Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ et $f : F \rightarrow F$ une application surjective. On suppose : $\exists K > 1 \quad \forall x, y \in F \quad |f(y) - f(x)| \geq K |y - x|$. On dit que f est une K -dilatation sur F . Alors f admet un unique point fixe.

L'application f est surjective et injective (facile). Sa réciproque f^{-1} est une contraction stricte (de rapport $\frac{1}{K}$) sur $\mathbb{R}$ donc admet un unique point fixe. D'où le résultat. (L'hypothèse de surjectivité est essentielle ; Penser à la 2-dilatation $x \mapsto 2x + 1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, sans point fixe dans $\mathbb{R}^+$.)

Exercice : Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(mx + p).$$

Que peut-on dire de f ?

Si $m = 1$, f est p -périodique. Si $m = 0$, f est clairement constante. On suppose à présent $|m| < 1$. L'application affine $\varphi : x \mapsto mx + p$ est une m -contraction stricte sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\varphi^n(x))$ converge vers le point fixe $l = \frac{p}{1-m}$ de φ . Par continuité de f , la suite $(f(\varphi^n(x)))$, constante de valeur $f(x)$, converge vers $f(l)$. f est donc constante sur $\mathbb{R}$. Si on suppose $|m| > 1$, $\psi = \varphi^{-1}$ (correctement définie) est une $\frac{1}{m}$ -contraction stricte sur $\mathbb{R}$ et avec l'égalité de fonctions $f = f \circ \psi$ facile à obtenir, on retrouve que f est une fonction constante.

3- Un raffinement de *Picard 1*

Dans la preuve de *Picard 1* (point 2), on peut se passer de la complétude de $[a, b]$ (fermé dans le complet $\mathbb{R}$) et exploiter plutôt sa compacité (fermé et borné dans $\mathbb{R}$). En effet, si (u_n) désigne une suite récurrente associée à la k -contraction stricte f , l'inégalité (★) $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ assure que la suite bornée (u_n) est quasi-fixe pour f ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$), donc converge...

La compacité de $[a, b]$ permet même d'affaiblir la condition de contraction dans *Picard 1*.

Propriété

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad x \neq y \Rightarrow |f(y) - f(x)| < |y - x|.$$

On dit que f est une contraction forte sur $[a, b]$. Alors

1. f admet un unique point fixe r sur $[a, b]$.
2. le bassin d'attraction de r est $[a, b]$.

Preuve de 2 : Soit $c \in [a, b]$. L'application f rapproche du point fixe $r = f(r)$ donc la suite $(|u_n - r|)$ est décroissante, et minorée par 0, elle converge. Soit ε sa limite. On suppose $\varepsilon > 0$. Soit L une valeur d'adhérence de la suite réelle bornée (u_n) et $(u_{\phi(n)})$ une sous-suite de (u_n) qui converge vers L . La suite $(|u_{\phi(n)} - r|)$ converge vers ε et vers $|L - r|$, d'où l'égalité $|L - r| = \varepsilon$ (valable quelle que soit la valeur d'adhérence L de (u_n)). A présent, $f(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\phi(n)+1}$, qui est une autre valeur d'adhérence de (u_n) , vérifie aussi $|f(L) - r| = \varepsilon$. Impossible puisque $|f(L) - r| = |f(L) - f(r)| < |L - r|$.

Exemple : Soit (u_n) la suite de germe $a \in I = [0, 1]$ et de fonction génératrice $f : x \in I \mapsto x - x^2 = x(1 - x) \in I$. L'application f est dérivable sur I avec $f'(x) = 1 - 2x$. Pour $x \neq y$ dans I , le théorème des accroissements finis assure l'existence de $c_{x,y} \in]0, 1[$ tel que

$$|f(y) - f(x)| = |1 - 2c_{x,y}| \times |y - x| < |y - x|.$$

On conclut que (u_n) converge vers l'unique point fixe de f sur I , qui est 0.

Un énoncé plus général : Toute contraction stricte $f : K \rightarrow K$ sur une partie compacte K de $\mathbb{R}$ possède un unique point fixe dans K , dont le bassin d'attraction est K .

Remarque 1 : Peut-on remplacer " K compacte" par " K complet (ou fermé de $\mathbb{R}$)" ? Non ! Considérer $f : x \mapsto x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, clairement sans point fixe dans $\mathbb{R}$. On peut noter au passage que f n'est pas strictement contractante sur $\mathbb{R}$ (sinon contradiction avec Picard 2) et "pourtant" f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $|f'(x)| = |1 - \frac{1}{1+x^2}| < 1$.

Autres contre-exemples : $x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
 $x \mapsto 1$ si $x < 0$ et $x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$ si $x \geq 0$.

Remarque 2 : On peut montrer que toute contraction forte sur un espace métrique compact non vide E admet un unique point fixe obtenu par approximations successives (Théorème d'Edelstein). On ne peut y remplacer "contraction forte" par "contraction large" : considérer dans $\mathbb{R}^2$ la rotation $(x, y) \mapsto (-y, x)$ sur le cercle unité.

Enfin, voici pour le plaisir un joli résultat de point fixe, application du théorème de Picard ou d'Edelstein, "carbonisé" dans $\mathbb{R}$ par le "petit" théorème de Brouwer, mais obtenu de façon si élégante qu'on fait ponctuellement une entorse à notre cadre réel. Un renforcement des hypothèses de structure sur l'espace ambiant permet un assouplissement des conditions de contraction.

Propriété (hors-sujet)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, C compact convexe non vide de E , f contraction large (1-lipschitzienne) de C dans C . Alors f a un point fixe.

Preuve : On choisit c dans $C \neq \emptyset$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit correctement l'application $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}c + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ du convexe C dans C . f_n est $(1 - \frac{1}{n})$ -contractante donc admet un unique point fixe r_n dans C . On choisit une valeur d'adhérence r de (r_n) dans le compact C et une sous-suite de (r_n) , qu'on note aussi (r_n) et qui converge vers r . On fait alors tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $\frac{1}{n}c + (1 - \frac{1}{n})f(r_n) = r_n$ et on obtient $f(r) = r$.

L'hypothèse de convexité est essentielle ; Considérer dans $\mathbb{R}^2$ euclidien la restriction de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ au cercle S^1 , clairement 1-lipschitzienne sur le compact S^1 et pourtant sans point fixe dans S^1 .

4- Point fixe attractif

a) Propriété

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application de classe C^1 sur $[a, b]$ et r un point fixe de f .

1. On suppose que $|f'(r)| < 1$. Alors r est intérieur (dans $[a, b]$) à son bassin d'attraction $\mathcal{A}_r$, ce qui revient à dire que l'ensemble $\mathcal{A}_r$ est un ouvert de $[a, b]$.
2. Si $|f'(r)| > 1$, alors toute suite récurrente associée à f qui converge, stationne à r .

Vocabulaire : Lorsque la condition $|f'(r)| < 1$ est réalisée, on dit que r est un point fixe fortement attractif.

Pour (1) : On choisit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(r)| < k < 1$. La continuité de f' permet de choisir $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [r - \delta, r + \delta] \cap [a, b] \quad |f'(t)| \leq k$. D'après Picard 1, r est l'unique point fixe de la k -contraction f sur le segment $K = [r - \delta, r + \delta] \cap [a, b]$ et son bassin d'attraction contient K .

Soit $x \in \mathcal{A}_r$. Puisque la suite de terme général $u_n^x = f^n(x)$ converge vers r , on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}^x = f^{n_0}(x) \in [r - \frac{\delta}{2}, r + \frac{\delta}{2}] \cap [a, b]$. Par continuité de f^{n_0} en x , on trouve $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in]x - \eta, x + \eta[\cap [a, b] \quad f^{n_0}(y) \in K.$$

Pour tout $y \in]x - \eta, x + \eta[\cap [a, b]$, la suite de germe $f^{n_0}(y)$ et de fonction génératrice f converge alors vers r . Or la suite $(f, f^{n_0}(y))$ est la suite (f, y) à laquelle on a enlevé les n_0 premiers termes. Donc $y \in \mathcal{A}_r$.

Pour (2) : Par l'absurde, il existe $c \in [a, b]$ tel que $(f^n(c))$ converge vers r avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(c) \neq r$. Le quotient $\frac{f^{n+1}(c) - r}{f^n(c) - r} = \frac{f(f^n(c)) - f(r)}{f^n(c) - r}$ tend vers $f'(r) > 1$, donc par le critère de D'Alembert (comparaison avec une suite géométrique de raison $q \in]1, f'(r)[$), la suite de terme général $|f^n(c) - r|$ tend vers $+\infty$. Contradiction !

b) Exercice

On veut montrer que toute fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 possède au moins un point fixe non fortement attractif.

On raisonne par l'absurde en supposant que : $\forall r \in \text{Fix}(f) \quad |f'(r)| < 1$.

- Les points fixes de f sont isolés dans $[a, b]$.

Par l'absurde, f possède un point fixe r qui est point d'accumulation de $\text{Fix}(f)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit alors $r_n \in \text{Fix}(f) \cap]r, r + \frac{1}{n}]$. La suite $\left(\frac{f(r_n) - f(r)}{r_n - r}\right)$, constante égale à 1, converge vers $f'(r) < 1$. Absurde !

- Conclusion

On considère deux points fixes consécutifs de f , $r < s$. L'application continue g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$, garde un signe constant sur $]r, s[$ puisqu'elle ne s'annule pas sur $]r, s[$. On a $g'(r) = f'(r) - 1 < 0$ donc on peut trouver $x \in]r, s[$ tel que $g(x) < 0$, et donc $g < 0$ sur $]r, s[$. Il vient alors $g'(s) \geq 0$. Contradiction puisque $g'(s) = f'(s) - 1$ et $|f'(s)| < 1$.

Références

- Polycopiés de J.M. Exbrayat pour l'agrégation, Université de Montpellier
- Divers numéros de la RMS, Exercices d'oraux pour les Grandes Ecoles, Vuibert
- Analyse à une variable réelle, A. Tissier, J.N. Mialet, Bréal
- Cours d'analyse, P. Doukhan, J.C. Sifre, Dunod
- Les maths en tête, analyse, X. Gourdon, Ellipses
- La planète $\mathbb{R}$, H. Boualem, R. Brouzet, Dunod
- Cours d'analyse, A. Pommelet, Ellipses
- Page personnelle de F. Dehame